

62. Určete, kdy mají dané výrazy smysl:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{8}{7x^2y} & \text{b)} \frac{x-y}{x+y} & \text{c)} \frac{3x-7y}{5x+9y} \\ \text{d)} \frac{36x-25y}{9x^2-4y^2} & \text{e)} \frac{2x-y}{x^2+10xy+25y^2} & \text{f)} \frac{(x-y)(x+y)}{4x^2-24xy+36y^2} \end{array}$$

63. Vypočítejte hodnotu výrazu $\frac{5-x}{2x}$ pro $x = -3; -\frac{5}{4}; 0; 0,5; 1; 5$.

64. Vypočítejte hodnotu výrazu $\frac{25-x^2}{4-x}$ pro $x = -5; -4; 0; 0,5; 4; 5$.

65. Vypočítejte hodnotu výrazu $\frac{-2x+x^3}{x}$ pro $x = -3; -2; -1; 0; \frac{1}{2}; 2; 3$.

66. Určete, pro kterou hodnotu proměnné x se daný výraz rovná nule:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x}{x-1} & \text{b)} \frac{x-3}{x-7} & \text{c)} \frac{5x+6}{2x+1} \\ \text{d)} \frac{x^2-2x}{16x-9} & \text{e)} \frac{x^2+4x}{x^2-4x} & \text{f)} \frac{x^2-16}{x+4} \end{array}$$

Příklad 7

Rozšiřte dané lomené výrazy výrazem uvedeným v závorce:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x-2}{x-5} & (-1) & \text{b)} \frac{5x}{y} & (6x) \\ \text{c)} \frac{x+3}{x} & (x+3) & \text{d)} \frac{x-1}{x+1} & (x-1) \end{array}$$

Řešení

$$\begin{array}{l} \text{a)} \frac{x-2}{x-5} = \frac{(x-2) \cdot (-1)}{(x-5) \cdot (-1)} = \frac{2-x}{5-x}, x \neq 5 \\ \text{b)} \frac{5x}{y} = \frac{5x \cdot 6x}{y \cdot 6x} = \frac{30x^2}{6xy}, x \neq 0, y \neq 0 \\ \text{c)} \frac{x+3}{x} = \frac{(x+3)(x+3)}{x(x+3)} = \frac{x^2+6x+9}{x^2+3x}, x \neq 0, x \neq -3 \end{array}$$

$$\text{d)} \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}, x \neq -1, x \neq 1$$

Úlohy

67. Rozšiřte dané lomené výrazy výrazem uvedeným v závorce:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{-x-y}{x-y} & (-1) & \text{b)} \frac{2}{7x} & (3) \\ \text{c)} \frac{3x}{4y} & (-5x) & \text{d)} \frac{-7x}{3y} & (4xy) \\ \text{e)} \frac{x+5}{4x} & (x-2) & \text{f)} \frac{-2x}{x-y} & (-x-y) \end{array}$$

68. Rozšiřte lomené výrazy tak, aby se jmenovatel rovnal výrazu uvedenému v závorce:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2}{13a} & (39a) & \text{b)} \frac{4}{7b} & (14ab) \\ \text{c)} \frac{2a-9}{3a} & (6a^2b) & \text{d)} \frac{4a}{a+1} & (a^2+a) \end{array}$$

69. Rozšiřte lomené výrazy tak, aby se jmenovatel rovnal výrazu uvedenému v závorce:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2u-5}{u-2} & (2-u) & \text{b)} \frac{u-2}{u+2} & (u^2-4) \\ \text{c)} \frac{-3u}{3-u} & (u^2-9) & \text{d)} \frac{u+5}{u-5} & (u^2-10u+25) \end{array}$$

70. Doplňte tak, aby platila rovnost:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{1}{2} = \frac{\quad}{2a+6} & \text{b)} b-c = \frac{\quad}{b+c} \\ \text{c)} \frac{3r}{r-s} = \frac{\quad}{r^2-s^2} & \text{d)} \frac{-2m}{m-n} = \frac{\quad}{n^2-m^2} \end{array}$$

71. Najděte společný jmenovatel lomených výrazů:

- a) $\frac{2}{3x}$, $\frac{7}{x^2}$ b) $\frac{1}{3x}$, $\frac{5}{6x^2}$, $\frac{7}{10x}$
 c) $\frac{1}{2xy^3}$, $\frac{3}{8x^2y}$ d) $\frac{2x}{x-y}$, $\frac{2y}{x+y}$
 e) $\frac{2x}{3x-5}$, $\frac{7x}{5-3x}$ f) $\frac{x-3y}{x+3y}$, $\frac{3xy}{x^2+6xy+9y^2}$

Příklad 8

Krátke a zapíšte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

- a) $\frac{6x^2y}{4xy^2}$ b) $\frac{xy-y}{y}$ c) $\frac{x^2-xy}{7x-7y}$
 d) $\frac{1-x}{x-1}$ e) $\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$ f) $\frac{3x^2+12x+12}{6x^2-24}$

Řešení

- a) $\frac{6x^2y}{4xy^2} = \frac{3x \cdot 2xy}{2y \cdot 2xy} = \frac{3x}{2y}$, $x \neq 0, y \neq 0$
 b) $\frac{xy-y}{y} = \frac{y(x-1)}{y} = x-1$, $y \neq 0$
 c) $\frac{x^2-xy}{7x-7y} = \frac{x(x-y)}{7(x-y)} = \frac{x}{7}$, $x \neq y$
 d) $\frac{1-x}{x-1} = \frac{(-1) \cdot (x-1)}{x-1} = -1$, $x \neq 1$
 e) $\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x+y)} = \frac{x-y}{x+y}$, $x \neq -y$
 f) $\frac{3x^2+12x+12}{6x^2-24} = \frac{3(x^2+4x+4)}{6(x^2-4)} = \frac{3(x+2)^2}{6(x+2)(x-2)} = \frac{x+2}{2(x-2)}$, $x \neq -2, x \neq 2$

Úlohy

72. Krátke a zapíšte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

- a) $\frac{15x^2y}{3xy}$ b) $\frac{(4x^2y)^2}{8x^3y}$ c) $\frac{xy-y}{xy}$
 d) $\frac{x-2}{3x-6}$ e) $\frac{x^2-1}{x-1}$ f) $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$

73. Krátke a zapíšte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

- a) $\frac{m^2-16}{m^2-4m}$ b) $\frac{m-n}{n-m}$ c) $\frac{3n^2-15n}{5-n}$
 d) $\frac{m^2-9n^2}{2m-6n}$ e) $\frac{m^2+6mn+9n^2}{m+3n}$ f) $\frac{4m^2-25n^2}{5n-2m}$

74. Zjednodušte a uveďte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

- a) $\frac{2a^2+3ab}{6ab+9b^2}$ b) $\frac{4a^2-28ab}{2a^2-14ab}$ c) $\frac{6a^2+3ab}{a^2+2ab}$
 d) $\frac{9a^2-4b^2}{9a^2-12ab+4b^2}$ e) $\frac{81a^2-1}{27a+3}$ f) $\frac{6a^3+48a^2+96a}{3a^2+12a}$

75. Zjednodušte a uveďte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

- a) $\frac{(x+3y)^2-y^2}{xy+2y^2}$ b) $\frac{x^2+xy-y(3x-y)}{2(x-y)^2}$

Příklad 9

Zjednodušte:

- a) $\frac{3}{2x} + \frac{1-5x}{5x^2}$ b) $\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{x+1}$
 c) $\frac{4}{3y} - \frac{y-3}{y^2-2y}$ d) $y-1 - \frac{y+2}{y-3}$
 e) $\frac{1}{y} + \frac{y}{y-1} + \frac{y}{1-y}$ f) $\frac{z}{z^2-1} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{1-z^2} + \frac{z+1}{z-1}$

Řešení

Při sčítání nebo odčítání lomených výrazů postupujeme tak, že nejprve výrazy upravíme na společného jmenovatele vhodným rozšířením.

Součástí úprav lomených algebraických výrazů je vždy (i když to není výslovně uvedeno v zadání) **stanovení podmínek**, pro něž platí rovnost mezi daným a upraveným výrazem.

a) Společným jmenovatelem je $10x^2$:

$$\frac{3}{2x} + \frac{1-5x}{5x^2} = \frac{3 \cdot 5x + (1-5x) \cdot 2}{10x^2} = \frac{15x + 2 - 10x}{10x^2} = \frac{5x + 2}{10x^2}$$

Rovnost platí pro $x \neq 0$.

b) Společným jmenovatelem je výraz $x(x+1)$:

$$\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1) - (x-2)x}{x(x+1)} = \frac{x^2 - 1 - x^2 + 2x}{x(x+1)} = \frac{2x-1}{x(x+1)}$$

Rovnost platí pro $x \neq 0, x \neq -1$.

$$\text{c) } \frac{4}{3y} - \frac{y-3}{y^2-2y} = \frac{4}{3y} - \frac{y-3}{y(y-2)} = \frac{4(y-2) - (y-3) \cdot 3}{3y(y-2)} = \frac{4y-8-3y+9}{3y(y-2)} = \frac{y+1}{3y(y-2)}$$

Rovnost platí pro $y \neq 0, y \neq 2$.

$$\text{d) } y-1 - \frac{y+2}{y-3} = \frac{y-1}{1} - \frac{y+2}{y-3} = \frac{(y-1)(y-3) - (y+2)}{y-3} = \frac{y^2-3y-y+3-y-2}{y-3} = \frac{y^2-5y+1}{y-3}$$

Rovnost platí pro $y \neq 3$.

e) Poslední lomený výraz rozšíříme číslem (-1) ; společný jmenovatel všech tří lomených výrazů je součin $y(y-1)$:

$$\frac{1}{y} + \frac{y}{y-1} + \frac{y}{1-y} = \frac{1}{y} + \frac{y}{y-1} + \frac{-y}{y-1} = \frac{y-1+y^2-y^2}{y(y-1)} = \frac{1}{y}$$

Rovnost platí pro $y \neq 0, y \neq 1$.

f) Rozšíříme-li třetí zlomek číslem (-1) , dostaneme:

$$\frac{z}{z^2-1} - \frac{1}{z+1} + \frac{-1}{z^2-1} + \frac{z+1}{z-1}$$

Dále je zřejmé, že společným jmenovatelem je výraz z^2-1 , tj. výraz $(z+1)(z-1)$:

$$\frac{z-(z-1)-1+(z+1)^2}{(z+1)(z-1)} = \frac{z-z+1-1+(z+1)^2}{(z+1)(z-1)} = \frac{(z+1)^2}{(z+1)^2} = \frac{z+1}{z-1}$$

Rovnost platí pro $z \neq -1, z \neq 1$.

Úlohy

76. Zjednodušte:

$$\text{a) } \frac{4}{3x} + \frac{3}{4x}$$

$$\text{b) } \frac{y+1}{y} - \frac{y-3}{y-1}$$

$$\text{c) } \frac{2a}{a-3} - \frac{a}{2a-6}$$

$$\text{d) } \frac{2}{b} - \frac{b-3}{b^2+2b}$$

77. Zjednodušte:

$$\text{a) } \frac{x}{x+1} + \frac{x+3}{3x}$$

$$\text{b) } \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{x+3} + \frac{x-4}{6+2x}$$

$$\text{d) } \frac{x+5}{x+2} + \frac{3-x^2}{x^2+2x}$$

78. Zjednodušte:

$$\text{a) } \frac{x}{x+1} - \frac{2x-3}{2x}$$

$$\text{b) } \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+1}{2-2x}$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{x-2} - \frac{2x+4}{x^2-2x}$$

$$\text{d) } \frac{x+2}{6x} - \frac{x^2+1}{3x^2+3x}$$

79. Zjednodušte:

$$\text{a) } \frac{r+2}{r-1} + \frac{r-2}{1-r}$$

$$\text{b) } \frac{s+2}{s+1} - \frac{s-1}{s-2}$$

$$\text{c) } \frac{1}{2u} - \frac{5}{6u} + \frac{u-1}{u^2+u}$$

$$\text{d) } \frac{4}{v} - \frac{v-1}{v^2} - \frac{3}{v+2}$$

80. Zjednodušte:

a) $1 + \frac{x+3}{x-4}$
b) $2 - \frac{x-5}{x+6}$
c) $\frac{x-3}{x+2} + x$
d) $\frac{x-4}{x-5} - 2x$

81. Zjednodušte:

a) $x-3 + \frac{1}{x-3}$
b) $2x-1 - \frac{2x^2+3}{x+6}$
c) $\frac{x+5}{x+4} + x-3$
d) $\frac{3+x^2}{x+3} - (x-2)$

82. Zjednodušte:

a) $\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}$
b) $\frac{b+2}{b-2} - \frac{b+1}{2-b}$
c) $\frac{3c-1}{c-2} - \frac{1-3c}{2+c}$
d) $\frac{2d+3}{d^2-1} - \frac{d+1}{1-d}$

83. Zjednodušte:

a) $\frac{x+5}{x-3} - \frac{x+1}{6-2x}$
b) $\frac{x+3}{x-4} + \frac{18-x}{8-2x}$
c) $\frac{x-2}{3x-4x^2} + \frac{1-x}{4x-3}$
d) $\frac{x+2}{x-2} + \frac{2x+4}{2x-x^2}$

84. Zjednodušte a správnost výsledku pro $x = -2$ ověřte dosazením:

a) $\frac{2x}{x+1} - \frac{2x^2+2}{x^2-1}$
b) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{6x}{x^2-9}$
c) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x^2+4x}{16-x^2}$
d) $\frac{2x^2+x}{9-4x^2} + \frac{x+1}{2x+3}$

85. Zjednodušte:

a) $\frac{y-1}{y+5} - \frac{y+1}{2y+10} - \frac{y-7}{15+3y}$
b) $\frac{2y-1}{y+3} - \frac{4y-1}{6+2y} - \frac{1,5}{3y+y^2}$
c) $\frac{y+2}{2y-5} + \frac{2y+4}{10-4y} - \frac{1}{y}$
d) $\frac{3y-1}{2-y} - \frac{y-3y^2}{y^2-2y} + \frac{y+2}{2y}$

80

86. Zjednodušte:

a) $\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{4}{x^2-1}$
b) $\frac{x-6}{x+6} + \frac{1}{6-x} + \frac{3x-5}{x^2-36}$
c) $\frac{x-3}{x-2} + \frac{5x}{x^2-4} - \frac{x}{x+2}$
d) $\frac{x-3}{x^2-9} - \frac{x}{x+3} - \frac{x-7}{3-x}$

87. Zjednodušte:

a) $\frac{1}{y+2} + \frac{y^2-y-6}{y^2+4y+4}$
b) $\frac{y+1}{y-3} + \frac{2(y-3)}{y^2-3(2y-3)}$

88. Zjednodušte:

a) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} - \frac{4y^2}{x^2-y^2}$
b) $\frac{1+x}{x+y} - \frac{1+x}{y-x} - \frac{2y+2xy}{x^2-y^2}$

Příklad 10

Zjednodušte a uveďte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

a) $\frac{1-2x}{3x} \cdot (-6x^2)$
b) $\frac{2}{y+z} \cdot (y^2-z^2)$
c) $\frac{m-5n}{3m-2n} \cdot (2n-3m)$
d) $\left(\frac{1}{r-3s} - \frac{3s+r}{9s^2-r^2} \right) \cdot (3s-r)$

Řešení

a) $\frac{1-2x}{3x} \cdot (-6x^2) = \frac{(1-2x) \cdot (-6x^2)}{3x} = \frac{(1-2x) \cdot (-2x) \cdot 3x}{3x} = (1-2x) \cdot (-2x) = -2x + 4x^2 = 4x^2 - 2x, x \neq 0$
b) $\frac{2}{y+z} \cdot (y^2-z^2) = \frac{2(y+z)(y-z)}{y+z} = 2(y-z), y \neq -z$
c) $\frac{m-5n}{3m-2n} \cdot (2n-3m) = \frac{(m-5n)(2n-3m)}{3m-2n} = \frac{(m-5n)(2n-3m)}{-(2n-3m)} = \frac{m-5n}{-1} = 5n-m, n \neq \frac{3}{2}m$
d) $\left(\frac{1}{r-3s} - \frac{3s+r}{9s^2-r^2} \right) \cdot (3s-r) = \frac{3s-r}{r-3s} - \frac{(3s+r)(3s-r)}{9s^2-r^2} = \frac{-(r-3s)}{r-3s} - \frac{(3s+r)(3s-r)}{(3s+r)(3s-r)} = -1 - 1 = -2, r \neq 3s, r \neq -3s$

81

Úlohy

89. Zjednodušte a uveďte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

a) $\frac{3+5x}{7x} \cdot 21x^2$ b) $\frac{1}{3x^2y} \cdot (-6x^2y^2)$

c) $\frac{x-1}{x^2-x} \cdot 3x^2$ d) $\frac{6x-1}{6x+1} \cdot (12x+2)$

e) $\frac{8x+7}{8x-7} \cdot (14-16x)$ f) $\frac{x-y}{x^2-4y^2} \cdot (x-2y)$

90. Zjednodušte a uveďte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

a) $\frac{u^3+u^2}{u^2-1} \cdot (u-1)$ b) $\frac{18v}{30v+42} \cdot (5v+7)$

*c) $\frac{4r^2+28rs+49s^2}{2r+7s} \cdot (2r-7s)$

*d) $\frac{p-q}{4p^2-8pq+4q^2} \cdot (4p^2-4pq)$

91. Zjednodušte:

a) $\frac{a-2b+1}{(a-2b)^2-1} \cdot (a-2b-1)$ b) $\frac{3a+2-b}{4-(3a-b)^2} \cdot (2+b-3a)$

92. Zjednodušte:

a) $\frac{x^2-y^2}{x+y} \cdot (-1)$ b) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1+x}{x}\right) \cdot (-2x)$

c) $\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot x^2$ d) $\left(\frac{xy-y}{y^3x} - \frac{2}{xy^2}\right) \cdot (-xy^2)$

e) $\left(\frac{x}{x+2y} + \frac{x-2y}{x^2-4y^2}\right) \cdot (2y+x)$

f) $\left(\frac{2}{3y-x} - \frac{x+3y}{x^2-9y^2}\right) \cdot (x-3y)$

Příklad 11

Zjednodušte:

a) $\frac{x^2-1}{x-x^2} \cdot \frac{2x+2}{x+x(x+1)+1}$

b) $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right)$

Rěšení

a) Rozložíme čitatele i jmenovatele lomených výrazů na součin vyřkáním nebo užitím vhodných vzorců a pak, pokud to lze, krátíme: $\frac{x^2-1}{x^2-1} \cdot \frac{2x+2}{2x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{2(x+1)}{2(x+1)} = \frac{x-x^2}{x+x(x+1)+1} = \frac{x(1-x)}{x(1-x) + (x+1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+1)} = \frac{2}{x}$
Rovnost platí pro $x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1$.

b) Výrazy v závorkách nejprve převedeme na společného jmenovatele a pak postupujeme podobně jako v první části příkladu:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{y-x}{y} = \\ & = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{(-1)(x-y)}{y} = \\ & = \frac{4xy}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{(-1)(x-y)}{y} = \frac{-4x}{x+y} \\ & \text{Rovnost platí pro } x \neq y, x \neq -y, y \neq 0. \end{aligned}$$

Úlohy

93. Zjednodušte:

a) $\frac{6x^4}{3xy^2} \cdot \frac{y^3}{2x^2y}$ b) $\frac{9x^5y^4}{5xy^5} \cdot \frac{20y^4}{12x^2y^3}$

c) $\frac{3x^2}{5z} \cdot \frac{4y^3}{6x} \cdot \frac{10z^2}{xy}$ d) $\frac{105x^2}{7xy} \cdot \frac{y^2}{6xz} \cdot \frac{z^2}{5yz}$

94. Zjednodušte:

a) $\frac{x+3}{x} \cdot \frac{2x}{x+3}$ b) $\frac{x^2}{x+8} \cdot \frac{8+x}{x}$

c) $\frac{x-5}{4x} \cdot \frac{2x^2}{x-5}$ d) $\frac{9x^2y}{x-7} \cdot \frac{7-x}{6xy}$

95. Zjednodušte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{2xy}{x+2y} \cdot \frac{3x+6y}{6x} & \text{b)} \frac{3x^2y}{6x-y} \cdot \frac{3y-18x}{x+y} \\ \text{c)} \frac{5x-3}{x+9} \cdot \frac{x^2+9x}{20x-12} & \text{d)} \frac{8-2x}{x^2-x} \cdot \frac{x-1}{x-4} \end{array}$$

96. Zjednodušte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{3x+9}{6x} \cdot \frac{2x-6}{x^2-9} & \text{b)} \frac{6x-24}{5x-15} \cdot \frac{3x+12}{16-x^2} \\ \text{c)} \frac{xy+x^2}{2xy} \cdot \frac{xy-y^2}{x^2-y^2} & \text{d)} \frac{x^2-y^2}{x^2+xy} \cdot \frac{xy}{(x-y)^2} \end{array}$$

97. Zjednodušte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) & \text{b)} \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) \left(1 - \frac{2}{1-x}\right) \\ \text{c)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) & \text{d)} \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \end{array}$$

98. Zjednodušte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(3a - \frac{3a}{a+1}\right) \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) & \text{b)} \left(1 - \frac{2}{a+1}\right) \left(1 - \frac{2}{a-1}\right) \\ \text{c)} \left(\frac{a}{a-1} - \frac{3a-1}{a^2-1}\right) \left(1 + \frac{1}{a}\right) & \text{d)} \left(\frac{a}{a+1} - \frac{3a+1}{1-a^2}\right) \left(\frac{1}{a} - 1\right) \end{array}$$

99. Zjednodušte a správnost výsledku pro $x = 1$ ověřte dosazením:

$$\left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{2+x}\right) \cdot \frac{x+2}{2x}$$

100. Zjednodušte a správnost výsledku pro $x = 0$ ověřte dosazením:

$$\left(\frac{x+3}{x+6} - \frac{x-2}{x-6}\right) \cdot \frac{x+6}{7x+6}$$

101. Zjednodušte a správnost výsledku pro $x = 0$ ověřte dosazením:

$$\left(\frac{x+2}{x-2} + \frac{2}{x^2-4} - \frac{x}{x+2}\right) \left(2 - \frac{x+4}{x+1}\right)$$

102. Zjednodušte a správnost výsledku pro $x = -2$ ověřte dosazením:

$$\left(\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x}\right) \left(1 + \frac{1}{x-2}\right)$$

Je možné ověřit správnost výsledku pro $x = 2$? Své tvrzení zdůvodněte.

Příklad 12

Zjednodušte:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \frac{2x-10}{x^2-4x+4} : \frac{x-5}{x-2} \\ \text{b)} \left(\frac{2x-1}{x+1} - \frac{2x+1}{x-1}\right) : \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \end{array}$$

Rěšení

Lomeným výrazem dělíme, jestliže násobíme výrazem převráceným k tomuto výrazu. To znamená, že při určování podmínek musí být rovněž nenulový jmenovatel převráceného výrazu, tj. původně čítele dělitele. Jinak postupujeme podobně jako v předcházejících příkladech na násobení lomených výrazů.

$$\text{a)} \frac{2x-10}{x^2-4x+4} : \frac{x-5}{x-2} = \frac{2(x-5)}{(x-2)^2} \cdot \frac{x-2}{x-5} = \frac{2}{x-2}$$

Rovnost platí pro $x \neq 2, x \neq 5$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \left(\frac{2x-1}{x+1} - \frac{2x+1}{x-1}\right) : \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) &= \\ = \frac{(2x-1)(x-1) - (2x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)} : \frac{x-1+1}{x-1} &= \\ = \frac{2x^2-2x-x+1 - (2x^2+2x+x+1)}{(x+1)(x-1)} : \frac{x}{x-1} &= \\ = \frac{-6x}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{-6}{x+1} \end{aligned}$$

Rovnost platí pro $x \neq -1, x \neq 1, x \neq 0$.

Úlohy

103. Zjednodušte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{12x^2}{x^2-6x+9} : \frac{3x}{x-3} & \text{b)} \frac{3x+6}{x^2+8x+16} : \frac{x+2}{x+4} \\ \text{c)} \frac{4x}{x(x+10)+25} : \frac{10-2x}{x^2-25} & \text{d)} \frac{x^2-8x}{x^2-16(x-4)} : \frac{3x+24}{x^2-64} \end{array}$$

104. Zjednodušte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{x^2 - 3xy}{x^3y} : \frac{x - 3y}{4x^2y} & \text{b)} \frac{x^2 - 5xy}{3y} : \frac{10y - 2x}{9xy} \\ \text{c)} \frac{x^2 - 6x + 9}{3y - 12} : \frac{x^2 - 9}{y - 4} & \text{d)} \frac{2x - 4y}{x + 3} : \frac{x^2 - 4y^2}{2y + x} \end{array}$$

105. Zjednodušte:

$$\frac{a-b}{a+b} : \left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

106. Zjednodušte a správnost výsledku pro $x = 1$, $y = -2$ ověřte dosazením:

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

107. Zjednodušte:

$$\left(\frac{x - 2y}{y} + \frac{2x - y}{x}\right) : \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

108. Zjednodušte a správnost výsledku pro $a = -1$ ověřte dosazením:

$$\left(\frac{1}{1-a} - 1\right) : \left(\frac{2a^2}{1-a} - a\right)$$

109. Zjednodušte:

$$\left(\frac{b}{b-1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3b^2}{1-b^2}\right)$$

110. Zjednodušte:

$$\left(c + 1 + \frac{1}{c-1}\right) : \left(1 + \frac{1}{c^2-1}\right)$$

111. Zjednodušte:

$$\frac{x^2 - y^2}{3x^2y^2} : \left(\frac{1+2x}{x} - \frac{2y-1}{y}\right)$$

Příklad 13

Zjednodušte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{2x}{3} : \frac{4x^2}{9y} & \text{b)} \frac{6x}{3y} - \frac{x+1}{2x^2} \\ \text{c)} \frac{x+x^2}{x-1} : \frac{1}{x^2-1} & \text{d)} \frac{x+1}{1-x} - \frac{x}{1-\frac{x}{x-1}} \end{array}$$

Řešení

$$\begin{array}{l} \text{a)} \frac{2x}{3} : \frac{4x^2}{9y} = \frac{2x}{3} \cdot \frac{9y}{4x^2} = \frac{3y}{2x} \\ \text{b)} \frac{6x}{3y} - \frac{x+1}{2x^2} = \frac{6x}{1} \cdot \left(-\frac{2x^2}{3y}\right) = -\frac{4x^3}{y} \end{array}$$

Rovnost platí pro $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$$\text{c)} \frac{x+x^2}{x-1} : \frac{1}{x^2-1} = \frac{6x}{1} \cdot \left(-\frac{3y}{2x^2}\right) = \frac{6x}{1} \cdot \left(-\frac{2x^2}{3y}\right) = -\frac{4x^3}{y}$$

Rovnost platí pro $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$$\text{d)} \frac{x+x^2}{x-1} = \frac{1}{x+x^2} : \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x(1+x)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \frac{1}{x}$$

Rovnost platí pro $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \frac{x+1}{1-x} = \frac{x+1}{1-x} \\ \text{b)} \frac{x+1}{1-x} - \frac{x+1}{2x^2} = \frac{x+1}{1-x} \\ \text{c)} \frac{x+x^2}{x-1} = \frac{1}{x+x^2} : \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{-1}{x-1} = \frac{x+1}{1-x} \cdot \frac{x-1}{-1} = \frac{x+1}{1-x} \cdot \frac{1-x}{1} = x+1 \\ \text{d)} \frac{x+1}{1-x} \cdot \frac{1-x}{1} = x+1 \end{array}$$

Rovnost platí pro $x \neq 1$.

Úlohy

112. Zjednodušte:

$$\frac{39x^2}{6y}$$

$$\text{a) } \frac{\frac{13x}{2y^2}}{\frac{13x}{2y^2}}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{5x^2}{3y}}{-10x}$$

$$\text{c) } \frac{1-x}{x^2-1} \cdot \frac{1}{1+x}$$

$$\text{d) } \frac{\frac{x+y}{x-y}}{x^2-y^2}$$

113. Zjednodušte:

$$\frac{-1}{2x}$$

$$\text{a) } \frac{\frac{21xy}{12x^2y^2}}{9xy^3}$$

$$\frac{84x^2y^3}{6x^2}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{21xy}{12x^2y^2}}{9xy^3}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{4x^2y}{8x}}{-8x}$$

$$\text{d) } \frac{\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}}{\frac{x-y}{x+y}}$$

*** 114.** Zjednodušte:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$$

$$1 - \frac{1}{x+1}$$

*** 115.** Zjednodušte:

$$\frac{r+s}{r-s} - \frac{r-s}{r+s} - \frac{4s^2}{r^2-s^2}$$

$$1 - \frac{r}{r+s}$$

64. 0; $1\frac{1}{8}$; $6\frac{1}{4}$; $7\frac{1}{14}$; nemá smysl; 0. 65. 7; 2; -1; nemá smysl; $-1\frac{3}{4}$; 2; 7. 66. a) $x = 0$; b) $x = 3$; c) $x = -\frac{6}{5}$; d) $x = 0$, $x = 2$; e) $x = -4$; f) $x = 4$. 67. a) $\frac{x+y}{y-x}$; b) $\frac{6}{21x}$; c) $\frac{-15x^2}{-20xy}$; d) $\frac{-28x^2y}{12xy^2}$; e) $\frac{x^2+3x-10}{4x^2-8x}$; f) $\frac{2x^2+2xy}{y^2-x^2}$. 68. a) $\frac{6}{39a}$; b) $\frac{8a}{14ab}$; c) $\frac{4a^2b-18ab}{6a^2b}$; d) $\frac{4a^2}{a^2+a}$. 69. a) $\frac{5-2u}{2-u}$; b) $\frac{(u-2)^2}{u^2-4}$; c) $\frac{3u^2+9u}{u^2-9}$; d) $\frac{u^2-25}{u^2-10u+25}$. 70. a) $a+3$; b) b^2-c^2 ; c) $3r^2+3rs$; d) $2mn+2m^2$.
71. a) $3x^2$; b) $30x^2$; c) $8x^2y^3$; d) x^2-y^2 ; e) $3x-5$; f) $(x+3y)^2$.
 72. a) $5x$; $x \neq 0$; $y \neq 0$; b) $2xy$; $x \neq 0$; $y \neq 0$; c) $\frac{x-1}{x}$; $x \neq 0$, $y \neq 0$; d) $\frac{1}{3}$; $x \neq 2$; e) $x+1$; $x \neq 1$; f) nemá se krátit; $x \neq -y$.
73. a) $\frac{m+4}{m}$; $m \neq 0$; $m \neq 4$; b) -1 ; $n \neq m$; c) $-3n$; $n \neq 5$; d) $\frac{m+3n}{2}$; $m \neq 3n$; e) $m+3n$; $m \neq -3n$; f) $-2m-5n$; $n \neq \frac{2m}{5}$. 74. a) $\frac{a}{3b}$; $b \neq 0$; $a \neq -\frac{3b}{2}$; b) 2; $a \neq 0$; $a \neq 7b$; c) $\frac{3(2a+b)}{a+2b}$; $a \neq 0$; $a \neq -2b$; d) $\frac{3a+2b}{3a-2b}$; $a \neq \frac{2b}{3}$; e) $\frac{9a-1}{3}$; $a \neq -\frac{1}{9}$; f) $2(a+4)$; $a \neq 0$; $a \neq -4$.
75. a) $\frac{x+4y}{y}$; $y \neq 0$; $x \neq -2y$; b) $\frac{1}{2}$; $x \neq y$. 76. a) $\frac{25}{12x}$; $x \neq 0$; b) $\frac{3y-1}{y(y-1)}$; $y \neq 0$; $y \neq 1$; c) $\frac{3a}{2(a-3)}$; $a \neq 3$; d) $\frac{b+7}{b(b+2)}$; $b \neq 0$; $b \neq -2$.
77. a) $\frac{4x^2+4x+3}{3x(x+1)}$; $x \neq 0$; $x \neq -1$; b) $\frac{2x^2+2}{x^2-1}$; $x \neq -1$; $x \neq 1$;

- c) $\frac{3x}{2(x+3)}$; $x \neq -3$; d) $\frac{5x+3}{x(x+2)}$; $x \neq 0$; $x \neq -2$. 78. a) $\frac{x+3}{2x(x+1)}$; $x \neq 0$; $x \neq -1$; b) $\frac{3(x+1)}{2(x-1)}$; $x \neq 1$; c) $\frac{x+2}{x}$; $x \neq 0$; $x \neq 2$; d) $\frac{3-x}{6(x+1)}$; $x \neq 0$; $x \neq -1$. 79. a) $\frac{4}{r-1}$; $r \neq 1$; b) $\frac{-3}{(s+1)(s-2)}$; $s \neq -1$, $s \neq 2$; c) $\frac{2(u-2)}{3u(u+1)}$; $u \neq 0$; $u \neq -1$; d) $\frac{7v+2}{v^2(v+2)}$; $v \neq 0$; $v \neq -2$.
80. a) $\frac{2x-1}{x-4}$; $x \neq 4$; b) $\frac{x+17}{x+6}$; $x \neq -6$; c) $\frac{x^2+3x-3}{x+2}$; $x \neq -2$; d) $\frac{-2x^2+11x-4}{x-5}$; $x \neq 5$. 81. a) $\frac{x^2-6x+10}{x-3}$; $x \neq 3$; b) $\frac{11x-9}{x+6}$; $x \neq -6$; c) $\frac{x^2+2x-7}{x+4}$; $x \neq -4$; d) $\frac{9-x}{x+3}$; $x \neq -3$. 82. a) $\frac{4a}{a^2-1}$; $a \neq -1$; $a \neq 1$; b) $\frac{2b+3}{b-2}$; $b \neq 2$; c) $\frac{2c(3c-1)}{c^2-4}$; $c \neq -2$; $c \neq 2$; d) $\frac{(d+2)^2}{d^2-1}$; $d \neq -1$; $d \neq 1$. 83. a) $\frac{3x+11}{2(x-3)}$; $x \neq 3$; b) $\frac{3}{2}$; $x \neq 4$; c) $\frac{x^2-2}{x(3-4x)}$; $x \neq 0$; $x \neq \frac{3}{4}$; d) $\frac{x+2}{x}$; $x \neq 0$; $x \neq 2$. 84. a) $\frac{2}{1-x}$; $\frac{2}{3}$; $x \neq -1$; $x \neq 1$; b) $\frac{x^2+9}{x^2-9}$; $-\frac{13}{5}$; $x \neq -3$; $x \neq 3$; c) $\frac{4}{x-4}$; $-\frac{2}{3}$; $x \neq -4$; $x \neq 4$; d) $\frac{1}{3-2x}$; $\frac{1}{7}$; $x \neq -\frac{3}{2}$; $x \neq \frac{3}{2}$. 85. a) $\frac{1}{6}$; $y \neq -5$; b) $-\frac{1}{2y}$; $y \neq -3$; $y \neq 0$; c) $-\frac{1}{y}$; $y \neq 0$; $y \neq \frac{5}{2}$; d) $\frac{y+2}{2y}$; $y \neq 2$; $y \neq 0$.
86. a) $\frac{4}{x-1}$; $x \neq -1$; $x \neq 1$; b) $\frac{(x-5)^2}{x^2-36}$; $x \neq -6$; $x \neq 6$; c) $\frac{6(x-1)}{x^2-4}$; $x \neq -2$; $x \neq 2$; d) $\frac{x-21}{x^2-9}$; $x \neq -3$; $x \neq 3$. 87. a) $\frac{y-2}{y+2}$; $y \neq -2$; b) $\frac{y+3}{y-3}$; $y \neq 3$. 88. a) $\frac{4y}{x+y}$; $x \neq -y$; $x \neq y$; b) $\frac{2(1+x)}{x+y}$; $x \neq -y$;

- $x \neq y$. **89.** a) $9x + 15x^2, x \neq 0$; b) $-2y, x \neq 0, y \neq 0$; c) $3x, x \neq 0, x \neq 1$; d) $2(6x-1), x \neq -\frac{1}{6}$; e) $-2(8x+7), x \neq \frac{7}{8}$; f) $\frac{x-y}{x+2y}, x \neq -2y, x \neq 2y$. **90.** a) $u^2, u \neq -1, u \neq 1$; b) $3v, v \neq -\frac{7}{5}$; c) $4r^2 - 49s^2, r \neq -\frac{7}{2}r$; d) $p, p \neq q$. **91.** a) $1, a \neq 2b-1, a \neq 2b+1$; b) $1, b \neq 3a-2, b \neq 3a+2$. **92.** a) $y-x, x \neq -y$; b) $2x, x \neq 0$; c) $x^2+x+1, x \neq 0$; d) $3-x, x \neq 0, y \neq 0$; e) $x+1, x \neq 2y, x \neq -2y$; f) $-3, x \neq 3y, x \neq -3y$. **93.** a) $x, x \neq 0, y \neq 0$; b) $3x^2, x \neq 0, y \neq 0$; c) $4y^2z, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$; d) $\frac{1}{2}, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. **94.** a) $2, x \neq 0, x \neq -3$; b) $x, x \neq 0, x \neq -8$; c) $\frac{x}{2}, x \neq 0, x \neq 5$; d) $-\frac{3x}{2}, x \neq 7, x \neq 0, y \neq 0$. **95.** a) $y, x \neq 0, x \neq -2y$; b) $\frac{-9x^2y}{x+y}, x \neq -y, y \neq 6x$; c) $\frac{x}{4}, x \neq -9, x \neq \frac{3}{5}$; d) $-\frac{2}{x}, x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$. **96.** a) $\frac{1}{x}, x \neq 0, x \neq 3, x \neq -3$; b) $\frac{-18}{5(x-3)}, x \neq 3, x \neq 4, x \neq -4$; c) $\frac{1}{2}, x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y, x \neq y$; d) $\frac{y}{x-y}, x \neq 0, x \neq y$. **97.** a) $\frac{x^2-1}{x^2}, x \neq 0$; b) $1, x \neq -1, x \neq 1$; c) $\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}, x \neq 0, y \neq 0$; d) $\frac{y^2-x^2}{y^2}, y \neq 0$. **98.** a) $3(a-1), a \neq 0, a \neq -1$; b) $\frac{a-3}{a+1}, a \neq -1, a \neq 1$; c) $\frac{a-1}{a}, a \neq 0, a \neq -1, a \neq 1$; d) $\frac{-a-1}{a}, a \neq 0, a \neq -1, a \neq 1$. **99.** $\frac{4}{x-2}, -4, x \neq 0, x \neq -2, x \neq 2$. **100.** $\frac{1}{6-x}, \frac{1}{6}, x \neq -6, x \neq 6, x \neq -\frac{6}{7}, x \neq -\frac{6}{7}$. **101.** $\frac{6}{x+2}, 3, x \neq 2, x \neq -2, x \neq -1$. **102.** $\frac{2}{x-2}, -\frac{1}{2}, x \neq -1,$

- $x \neq 1, x \neq 2$; pro $x = 2$ nemá výraz smysl. **103.** a) $\frac{4x}{x-3}, x \neq 3, x \neq 0$; b) $\frac{3}{x+4}, x \neq -4, x \neq -2$; c) $\frac{-2x}{x+5}, x \neq 5, x \neq -5$; d) $\frac{x}{3}, x \neq -8, x \neq 8$. **104.** a) $4, x \neq 0, y \neq 0, x \neq 3y$; b) $\frac{-3x^2}{2}, x \neq 0, y \neq 0, x \neq 5y$; c) $\frac{x-3}{3(x+3)}, x \neq -3, x \neq 3, y \neq 4$; d) $\frac{2}{x+3}, x \neq -3, x \neq -2y, x \neq 2y$. **105.** $\frac{-b}{a+b}, a \neq b, a \neq -b, b \neq 0$. **106.** $y-x, -3, x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$. **107.** $x+y, x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$. **108.** $\frac{1}{3a-1}, a \neq 1, a \neq 0, a \neq \frac{1}{3}$. **109.** $\frac{b+1}{2b+1}, b \neq 1, b \neq -1, b \neq \frac{1}{2}, b \neq -\frac{1}{2}$. **110.** $c+1, c \neq 1, c \neq -1, c \neq 0$. **111.** $\frac{x-y}{3xy}, x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$. **112.** a) $xy, x \neq 0, y \neq 0$; b) $-\frac{x}{6y}, x \neq 0, y \neq 0$; c) $-1, x \neq -1, x \neq 1$; d) $\frac{1}{(x-y)^2}, x \neq -y, x \neq y$. **113.** a) $-\frac{1}{12x^3}, x \neq 0$; b) $-\frac{y}{16}, x \neq 0$; c) $3y^3; x \neq 0, y \neq 0$; d) $1, x \neq y, x \neq -y$. **114.** $\frac{4}{x-1}, x \neq -1, x \neq 1, x \neq 0$. **115.** $4, s \neq 0, r \neq -s, r \neq s$.

8 Řešení lineárních rovnic a jejich soustav

- 1.** a) -3 ; b) -4 ; c) $-3,5$; d) $-1,5$; e) nemá řešení; f) řešením je libovolné reálné číslo. **2.** a) $0,5$; b) $1,5$; c) řešením je libovolné reálné číslo; d) nemá řešení. **3.** a) 3 ; b) -1 ; c) $-\frac{1}{2}$; d) $-\frac{5}{4}$. **4.** a) 30 ; b) -12 ; c) 15 ; d) $\frac{2}{3}$. **5.** a) 21 ; b) -2 ; c) 3 ; d) 6 . **6.** a) 5 ; b) 0 ; c) nemá